Devoir Maison 1

Comparaison séries-intégrales

À rendre pour le : **jeudi 19 décembre 2024**

Exercice 1: (Exercice 22 de la feuille d'exercices sur les intégrales généralisées)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante

1. Montrer que :

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad f(k) \geqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(On pourra faire, dans chaque cas, une comparaison d'intégraless de 2 fonctins pertinentes sur les intervalles respectifs $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$.)

2. Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} f(k)$ converge alors également.
(On pensera à utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs.)

3. Supposons maintenant que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ (indépendant de n) tel que

$$\int_1^n f \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

b) En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x f \leqslant M$$

puis que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

4. Justifier que si la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ ou l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \geqslant \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

5. *Question bonus :* On suppose qu'on a convergence dans les questions précédentes.

a) Encadrer le “reste” $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f dépendant de n.

b) *Application :* Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.